-EXERCICE 13.2-

• ENONCE :

« Particule dans un champ magnétique avec frottement fluide »

• Une particule, de charge $q \succ 0$, de masse m, est placée à l'origine O d'un référentiel galiléen (repère cartésien Oxyz), avec une vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

• Cette particule est soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$; par ailleurs, elle subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -k\vec{v}$.

1) Donner la loi de vitesse $v(t)$, où v est le module du vecteur vitesse ; en déduire la longueur L de la trajectoire.
2) Déterminer le point limite M_∞ atteint par la particule au bout d'un temps « très long », notion que l'on précisera (on pourra poser $\tau = \dfrac{m}{k}$, et $\omega = \dfrac{qB}{m}$).
3) Donner qualitativement l'allure de la trajectoire.

• CORRIGE :

«Particule dans un champ magnétique avec frottement fluide »

1) On applique le Théorème de l'Energie Cinétique à la particule, en rappelant que la force magnétique ne travaille pas :

$$\frac{dE_C}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=mv\times\frac{dv}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}=-kv^2 \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v(t)=0 \Rightarrow \boxed{v(t)=v_0\exp(-t/\tau)} \quad \boxed{\tau=\frac{m}{k}}$$

Rq : au bout d'un temps « très long » (en pratique, au bout de quelques constantes de temps τ), la vitesse de la particule devient nulle (rappelons que $v(3\tau)=0,05\times v_0$).

• On sait que : $v(t)=\frac{ds(t)}{dt}$ (où $s(t)$ est l'abscisse curviligne de la particule le long de sa trajectoire) $\Rightarrow$ $L=\int_0^\infty ds(t)=\int_0^\infty v(t)dt=\int_0^\infty v_0\exp(-t/\tau)dt=-v_0\tau\left[\exp(-t/\tau\right]_0^\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{L=v_0\tau}$

2) Appliquons maintenant le PFD à la particule, il vient : $m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{v}\wedge\vec{B}-k\vec{v}$

Le champ magnétique ne dépendant pas du temps, on peut intégrer simplement l'équation précédente entre $t=0$ et $t=\infty$, d'où :

$\int_0^\infty m\frac{dv}{dt}\times dt=\int_0^\infty q\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\vec{B}\times dt-\int_0^\infty k\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\times dt$ (où M est la position de la particule) ; alors :

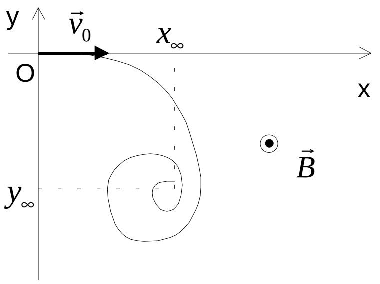
$m[\vec{v}(\infty)-\vec{v}(0)]=-m\vec{v}_0=q\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{B}\right]_0^\infty-k\left[\overrightarrow{OM}\right]_0^\infty=q\overrightarrow{OM}_\infty\wedge\vec{B}-k\overrightarrow{OM}_\infty$; en projection, il vient :

$$\begin{cases}-mv_0=qBy_\infty-kx_\infty & (1)\\ 0=-qBx_\infty-ky_\infty & (2)\end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'écrire :

$$\boxed{x_\infty=\frac{\tau v_0}{1+\omega^2\tau^2} \quad \text{et} \quad y_\infty=-\omega\tau x_\infty=-\omega\tau\times\frac{\tau v_0}{1+\omega^2\tau^2}}$$

3)



On sait qu'en l'absence de frottements, la trajectoire serait un cercle contenu dans le plan xOy, tangent à la vitesse initiale en O.
Les résultats des questions précédentes suggèrent l'allure de courbe ci-contre : il s'agit en fait d'une **spirale logarithmique** convergeant vers M_∞ .

 Christian MAIRE